

## ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 01.12.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ. РЕШЕНИЯ

**1.** На бесконечной клетчатой плоскости отмечено несколько клеток, причём у чётного числа из них отмечены все четыре соседа по стороне, а у оставшихся ровно два. Докажите, что всего отмечено чётное число клеток.

**Решение 1.** Соединим каждую отмеченную клетку ребром со всеми её отмеченными соседями. Можно считать, что получившийся граф связный. У любой клетки чётное число соседей, поэтому в графе найдётся эйлеров цикл. Любой цикл на клетчатой плоскости имеет чётную длину, а количество клеток, через которые цикл проходит дважды (то есть клеток степени 4) чётно по условию. Получается, что общее число клеток чётно, ч.т.д.

**Решение 2.** Граф тот же, что в предыдущем решении. Шахматная раскраска плоскости говорит о том, что граф двудольный, и раз степени всех вершин чётны, то и суммарное количество всех рёбер чётно (поскольку оно равно сумме степеней любой одной из долей). Пусть в графе  $x$  вершин степени 2 и  $y$  вершин степени 4. Тогда всего в нём  $(2x + 4y)/2 = x + 2y$  рёбер и  $x + y$  вершин. Поскольку  $y$  чётно,  $x + y \equiv x + 2y \equiv 0 \pmod{2}$ , что и требовалось доказать.

**2.** Обозначим за  $p(n)$  количество различных простых делителей  $n$ . Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$ , для которых число  $p(n + 1) - p(n)$  чётно.

**Решение 1.** Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда для всех достаточно больших  $n$  разность  $p(n + 1) - p(n)$  нечётна, поэтому для всех достаточно больших чётных чисел  $p(n)$  имеет одну чётность, а для всех достаточно больших нечётных чисел — другую. Однако это, разумеется, не так:  $p(2^k) = p(3^\ell) = 1$  при всех натуральных  $k$  и  $\ell$ .

**Решение 2.** Рассмотрим простое число  $q > 2$ . Тогда  $p(q(q - 2)) = p(q^2 - 2q) = 1 + p(q - 2)$ ,  $p((q - 1)^2) = p(q^2 - 2q + 1) = p(q - 1)$ . Поэтому  $p(q^2 - 2q + 1) - p(q^2 - 2q)$  и  $p(q - 1) - p(q - 2)$  имеют разную чётность.

**3.** Касательные в точках  $A$  и  $B$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $F$ .  $A_1$  и  $B_1$  — середины сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $FAB_1$  и  $FBA_1$  пересекаются в точке  $L$ , лежащей внутри треугольника  $ABC$ . Отрезок  $FL$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ . Докажите, что  $L$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  и  $K$  лежат на одной окружности.

**Решение.** Очевидно, что  $\angle FAB = \angle FBA = \angle C$ . Поскольку  $LA_1BF$  и  $LB_1AF$  вписанные, то  $\angle FLA_1 = 180^\circ - \angle A_1BF = \angle A$  и аналогично  $\angle FLB_1 = \angle B$ .

Угол  $\angle B_1LA_1$  опирается на среднюю линию треугольника  $ABC$  и равен сумме углов  $\angle A$  и  $\angle B$ . Значит,  $L$  лежит на окружности 9 точек треугольника  $ABC$  (поскольку геометрическое место таких точек в нужной полуплоскости от  $B_1C_1$  — дуга окружности 9 точек).

Пусть  $H$  — основание высоты  $CH$  треугольника  $ABC$ . Точка  $H$  тоже лежит на окружности 9 точек, значит  $B_1LA_1H$  вписанный, откуда  $\angle B_1LH = \angle B_1A_1H = \angle B = \angle FLB_1 = \angle B_1LK$ . Значит,  $K$  совпадает с  $H$ , и все четыре искомые точки лежат на одной окружности — окружности 9 точек треугольника  $ABC$ .

**4.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — различные вещественные корни уравнения  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Докажите, что  $x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ .

**Решение 1.** Обозначим корни уравнения за  $x = x_1, y = x_2, z$  (третий корень существует по теореме Безу, но возможно совпадает с одним из двух других). Не умаляя общности можем считать, что  $a = 1$ . По теореме Виета  $x + y + z = -b$  и  $xy + yz + xz = c$ . Выразим из первого уравнения  $z = -b - y - x$  и подставим во второе:  $xy + (x + y)(-b - y - x) = c$ , откуда  $xy - c = (b + x + y)(x + y)$ . Вспомним, что нам нужно доказать:  $xy \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2} = c - b^2/4 \iff xy - c \geq -b^2/4$ . Подставим вместо  $xy - c$  выражение, найденное нами выше; теперь нам остается проверить, что  $(b + x + y)(x + y) \geq -b^2/4$ . Перенесем все в левую часть и представим в виде полного квадрата  $(b/2 + x + y)^2 \geq 0$ , что завершает доказательство.

**Решение 2.** Запишем, что  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями, и вычтем одно выражение из другого:

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0$$

$$ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0$$

$$a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + c(x_1 - x_2) = 0$$

Так как  $x_1 \neq x_2$ , можем поделить на  $x_1 - x_2$ . Получим

$$0 = a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c - ax_1x_2.$$

Посмотрим на последнее выражение как на квадратное уравнение относительно  $z = x_1 + x_2$ . Так как  $x_1$  и  $x_2$  существуют, у этого уравнения есть корень, то есть дискриминант неотрицателен.  $D = b^2 - 4a(c - ax_1x_2) \geq 0$  Перенесём все, кроме  $x_1x_2$  направо, получим  $x_1x_2 \geq \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ .

5. Дано простое  $p > 3$ . Для каждого натурального  $n < p$  обозначим через  $x_n$  наименьшее натуральное число, для которого  $nx_n$  даёт при делении на  $p$  остаток 1. Какой остаток даёт при делении на  $p$  число  $\sum_{n=1}^{p-1} n \left[ \frac{nx_n}{p} \right]$ ?

**Ответ:**  $\frac{p-1}{2}$ . **Решение.** Как известно, для каждого натурального  $n < p$  есть ровно одно натуральное  $x_n$  такое, что  $nx_n \equiv 1 \pmod{p}$ . Поскольку  $(p-n)(p-x_n) \equiv 1 \pmod{p}$ , имеем  $x_{p-n} = p - x_n$ .

Разобьём все числа  $n \left[ \frac{nx_n}{p} \right]$ ,  $1 \leq n \leq p-1$ , на пары вида  $\left( k \left[ \frac{kx_k}{p} \right], (p-k) \left[ \frac{(p-k)x_{p-k}}{p} \right] \right)$  с  $1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$ . Сумма чисел в паре

$$\begin{aligned} k \left[ \frac{kx_k}{p} \right] + (p-k) \left[ \frac{(p-k)x_{p-k}}{p} \right] &= k \frac{kx_k - 1}{p} + (p-k) \frac{(p-k)(p-x_k) - 1}{p} = \\ &= \frac{k^2x_k - k + (p-k)^2(p-x_k) - (p-k)}{p} = \frac{p^3 - 2p^2k + pk^2 - p + (k^2 - (p-k)^2)x_k}{p} = \\ &= p^2 - 2pk + k^2 - 1 - px_k + 2kx_k \equiv k^2 + 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Поэтому наша сумма сравнима с

$$1^2 + 2^2 + \dots + \left( \frac{p-1}{2} \right)^2 + \frac{p-1}{2} \equiv \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2 - 1) \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} + \frac{p-1}{2} \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

6. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Окружность  $\Omega$  с центром в точке  $M$  на прямой  $AD$  проходит через точки  $B$  и  $C$  и повторно пересекает описанные окружности треугольников  $BAM$  и  $BDM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Прямые  $PQ$  и  $AD$  пересекаются в точке  $T$ . Докажите, что прямая  $TC$  касается окружности  $\Omega$ .

**Решение.** Так как  $MP = MB$  и  $ABMP$  — окружность, прямая  $AM$  — внешняя биссектриса треугольника  $BAP$ . Пусть прямая  $PA$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $B'$ , тогда она симметрична  $B$  относительно  $AD$ , так как прямые  $AB$  и  $AB'$  симметричны относительно диаметра. Аналогично прямые  $DQ$  и  $DB$  симметричны относительно  $AD$ , следовательно  $DQ$  также проходит через  $B'$ .  $BB' \perp AD \parallel BC$ , следовательно  $CB'B'$  — прямоугольный треугольник,  $M$  — центр его описанной окружности, следовательно точки  $C$ ,  $M$  и  $B'$  лежат на одной прямой. Отметим точку  $C'$ , симметричную  $C$  относительно  $AD$ . Так как  $C' \in (B'PQ)$  и  $C' \in (ADB')$  (по симметрии), это точка Микеля прямых  $AP$ ,  $PQ$ ,  $QD$  и  $DA$ , а тогда  $C' \in (DQT)$ . Следовательно,  $\angle TC'Q = \angle TDQ = \angle ADB' = \angle C'B'D = \angle C'B'Q$ . Получили, что  $TC'$  касается  $\Omega$ , значит то же верно и для  $TC$  в силу симметрии.

В задаче возможны различные случаи расположения точек. Разбора случаев можно избежать, если записать решение в направленных углах.

7. Дан граф  $G$  и натуральное число  $n > 1$ . Известно, что вершины графа  $G$  нельзя правильным образом раскрасить в  $n$  цветов. Докажите, что в графе  $G$  существует простой цикл длины  $k(n-1)+2$  для некоторого натурального  $k$ .

**Решение.** Можно считать, что граф  $G$  связный. В любом связном графе существует остовное дерево  $D$  с выделенной в нём корневой вершиной  $A$  со следующим свойством: любое ребро, не входящее в  $D$  соединяет какую-то вершину с каким-то из её предков. Это остовное дерево получается при запуске на графе обхода в глубину.

Поскольку вершины  $G$  не красятся правильным образом в  $n$  цветов, из какой-то вершины  $G$  ведёт 'вверх' (в сторону корня) хотя бы  $n$  рёбер. Иначе вершины можно было бы красить сверху вниз, каждый раз выбирая цвет, которого ещё не было среди соседей вершины.

Рассмотрим тогда вершину  $X$ , из которой выходит хотя бы  $n-1$  ребро в её предков, и путь из неё по рёбрам  $D$  до корня. Тогда мы имеем путь из  $A$  в  $X$ , в который выходит из  $X$  хотя бы  $n$  рёбер. Пусть это рёбра из  $X$  в вершины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (в порядке, в котором они находятся в пути). Пусть  $a_i$  — количество рёбер между  $X_i$  и  $X_{i+1}$ . Тогда для  $i < j$  цикл, образованный вершинами  $X, X_i, X_j$  и вершинами пути между  $X_i$  и  $X_j$  имеет длину  $2 + a_i + a_{i+1} + \dots + a_{j-1}$ . Тогда мы хотим, чтобы при каком-то выборе  $i, j$  число  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{j-1}$  делилось на  $n-1$ . Рассмотрим числа  $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_{n-1}$ . Эти числа по модулю  $n-1$  дают  $n-1$  каких-то остатков. Если среди этих остатков есть два одинаковых, то разность между соответствующими суммами даёт то, что нужно. В противном случае все остатки различны, и тогда среди них есть нулевой.